Dominios de holomorfía: ejemplos y propiedades

Sofía Ortega Castillo
sofia.ortega@cimat.mx
soc43@bath.ac.uk

Septiembre 19, 2018

Abstract

El propósito de estas notas es proveer de la teoría en varias variables complejas que es fundamental, o bien, relevante para entender a los dominios de holomorfía, especialmente desde el punto de vista local.

1 Holomorfía en varias variables

Un primer concepto a comprender en varias variables complejas es el de función holomorfa. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, ejemplos naturales de funciones holomorfas sobre Ω con valores complejos son los *polinomios* en las coordenadas complejas $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Más aún, por comparación con el caso en una variable compleja, escojamos a las series de potencias multivariables como un modelo local de las funciones holomorfas $\mathbb{C}$-valuadas. Dado $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$, una *serie de potencias multivariable* centrada en a toma la forma

$$\sum_{\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}(z_1-a_1)^{\alpha_1}\cdots(z_n-a_n)^{\alpha_n}, \quad \text{donde cada } c_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)} \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

y converge absolutamente en polidiscos cerrados $\overline{D(a_1, r_1)} \times \cdots \times \overline{D(a_n, r_n)}$ uniformemente dentro de Ω.

Puesto que las series de potencias multivariable convergen uniformemente en compactos, es fácil ver que representan funciones continuas que son holomorfas en cada variable por separado. Debido a esto, en general tiene sentido decir que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es **holomorfa** ($f \in \mathcal{H}(\Omega)$) si lo es en cada variable compleja por separado, y en conjunto es una función continua en Ω.

Con esta definición, al iterar la fórmula integral de Cauchy es sus n variables, vemos que para todo z en un polidisco $D(a, r) := D(a_1, r_1) \times \cdots \times D(a_n, r_n)$ cuya cerradura está contenida en Ω,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 D(a,r)} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}, \tag{1.2}$$

donde $b_0 D(a, r) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - a_j| = r_j, 1 \leq j \leq n\}$ es la frontera distinguida del polidisco dado.

Re-escribiendo cada término $\frac{1}{\zeta_i - z_i}$ del kernel de Cauchy en (1.2) como una serie de potencias en z_i centrada en a_i, obtenemos una expansión de f en serie de potencias multivariable, que converge absoluta y uniformemente en el polidisco $D := D(a, r)$:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 D} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{\alpha_1 + 1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{\alpha_n + 1}} \cdot (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - a_n)^{\alpha_n}, \tag{1.3}$$

es decir, efectivamente cada función holomorfa en Ω admite una expansión en serie de potencias multivariable centrada en cada $a \in \Omega$, convergiendo absolutamente en todo polidisco cerrado $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$.

Ejercicio 1.1. Prueba que un serie de potencias multivariable centrada en a que converge absolutamente en el polidisco cerrado $\overline{D(a, r)}$, tiene una expansión en serie de potencias multivariable centrada en cada otro punto $z \in \overline{D(a, r)}$.

Puesto que una función es holomorfa si y sólo si admite expansiones locales en series de potencias multivariable, uno concluye que una función holomorfa f en a es *(Fréchet)* $\mathbb{C}$*-diferenciable* en a, es decir, existe una transformación $\mathbb{C}$-lineal $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ que aproxima linealmente a f cerca de a, i.e.,

$$f(a + h) = f(a) + T(h) + o(|h|), \tag{1.4}$$

lo cual se satisface justamente para T el polinomio homogéneo de grado 1 en la expansión en serie de potencias multivariable de f centrada en a.

Ejercicio 1.2. Prueba el recíproco: si una función es $\mathbb{C}$-diferenciable entonces es holomorfa.

Las caracterizaciones anteriores de funciones holomorfas en varias variables permiten generalizar propiedades clásicas al caso multivariable. Fijemos notación para entrar en detalles. Escribamos $\frac{\partial}{\partial z_k}$ para denotar a la derivada compleja con respecto a la variable $z_k = x_k + i \cdot y_k$.

Ejercicio 1.3. Verifica que $\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_k})$. Más aún, si definimos $\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_k})$, usa las ecuaciones de Cauchy-Riemann para deducir que una función en n variables complejas es holomorfa en la k-ésima variable si se anula con respecto al operador $\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}$.

Dado que la frontera distinguida de un polidisco es un compacto, podemos tomar derivadas bajo el signo de integración en el lado derecho de la ecuación (1.2) y obtener nuevamente que una función holomorfa tiene derivadas complejas de todos los órdenes con respecto a cada una de las variables z_k, $k = 1, \cdots, n$.

De hecho, dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, si D^α denota a $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$, tenemos que para todo elemento a del dominio Ω de una función holomorfa f,

$$D^\alpha f(a) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{b_0 D} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - a_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{\alpha_n+1}}, \tag{1.5}$$

que al comparar con (1.3) nos lleva a que la expansión en serie de potencias multivariable de una función holomorfa coincide con su *serie de Taylor* en cada punto del dominio. A partir de esto es posible recuperar en varias variables algunas herramientas del análisis complejo, como las estimaciones de Cauchy, el Principio de Identidad, el Teorema del Mapeo Abierto y el Principio del Máximo.

Ejercicio 1.4. Prueba cada uno de los resultados mencionados en el párrafo anterior.

2 Dominios de holomorfía

Como motivación al estudio de dominios de holomorfía, estudiemos la familia de ejemplos que consiste de los dominios de convergencia. Dada una serie de potencias multivariable centrada en 0, su *dominio de convergencia* es el interior del conjunto de puntos en $\mathbb{C}^n$ donde tal serie converge. En comparación con lo sucedido en una variable compleja, las series de potencias multivariable no necesariamente tienen una bola o polidisco como dominio de convergencia, por ejemplo:

- $\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ tiene dominio de convergencia $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, y

- $\sum_{n=1}^{\infty} z_1^n z_2^n$ tiene dominio de convergencia $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1/|z_2|\}$.

Ejercicio 2.1. Halla los dominios de convergencia para $\sum_{\nu_1,\nu_2\geq 0} \frac{\nu_1}{\nu_2!} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}$ y $\sum_{\nu_1,\nu_2>0} \nu_1! z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}$, respectivamente.

Los dominios de convergencia D satisfacen las siguientes propiedades:

- son multicirculares (*dominios de Reinhardt*), es decir, si $(z_1, \cdots, z_n)$ cae en D, también cae todo punto de la forma $(\lambda_1 z_1, \cdots, \lambda_n z_n)$, donde $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$.
- más aún, son *dominios multicirculares completos*: si $(z_1, \cdots, z_n) \in D$, entonces el polidisco $\mathbb{D}(0, |z_1|) \times \cdots \times \mathbb{D}(0, |z_n|)$ está contenido en D,
- y son *logarítmicamente convexos*, lo que significa que el dominio

  $$\log(D) := \{x \in \mathbb{R}^n : x = (\log |w_1|, \cdots, \log |w_n|) \text{ para algún } w \in D\}$$

  es convexo. Esto se sigue de la desigualdad de Hölder: si $\sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha|$ y $\sum_\alpha |c_\alpha w^\alpha|$ convergen, también $\sum_\alpha |c_\alpha||z^\alpha|^t |w^\alpha|^{1-t}$ converge.

Recíprocamente, un dominio multicircular completo que es logarítmicamente convexo resulta ser un dominio de convergencia. En efecto, cuando un dominio D así es acotado, una serie de potencias multivariable con dominio de convergencia D es $\sum_\alpha z^\alpha / N_\alpha(D)$, donde $N_\alpha(D) = \sup_{w\in D} |w^\alpha|$.

Ejercicio 2.2. Dado un dominio D no acotado que es multicircular, completo y logarítmicamente convexo, construye una modificación de la última serie de potencias multivariable cuyo dominio de convergencia es D.

Un resultado de Cartan y Thullen de 1932 garantiza que el dominio de convergencia de una serie de potencias multivariable es una *frontera natural*, es decir, existe otra serie de potencias que converge en el dominio y que es singular en todos los puntos de la frontera. La prueba se trata de verificar que las funciones holomorfas en el dominio dado que se extienden holomórficamente más allá de algún punto de la frontera forman un conjunto de la primera categoría en el espacio metrico completo de funciones holomorfas $\mathbb{C}$-valuadas sobre el dominio (con la topología de convergencia uniforme en compactos) usando el lema multidimensional de Pringsheim: una serie de potencias con coeficientes reales no-negativos es singular en los puntos de la frontera de su dominio de convergencia cuyas coordenadas son todas no-negativas [1].

Ejercicio 2.3. Prueba que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, cuyo dominio de convergencia es el disco unitario, solamente es singular en $z_0 = 1$, pero existe otra serie de potencias cuya frontera natural es el disco unitario.

Debido al resultado mencionado de Cartan y Thullen, un dominio de convergencia es un *dominio de existencia*: $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto es el dominio de existencia de una función $f \in \mathcal{H}(U)$ si no hay abiertos V y W en $\mathbb{C}^n$ ni función $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ tales que

- V es conexo y no está contenido en U,
- $\emptyset \neq W \subset U \cap V$,
- $\tilde{f} = f$ en W.

Los dominios de existencia no admiten *continuación holomorfa*: si $U \subset \mathbb{C}^n$ es abierto, un subconjunto V de $\mathbb{C}^n$ que contiene propiamente a U se dice que es una continuación holomorfa de U si toda $f \in \mathcal{H}(U)$ tiene una única extensión $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$. El recíproco no es cierto: los dominios que no admiten continuación holomorfa no necesariamente son dominios de existencia, pues los últimos dejan abierta la posibilidad de extender a través de una rama alternativa de holomorfía.

Veamos un dominio en $\mathbb{C}^2$ que admite continuación holomorfa, y por tanto no es dominio de existencia. El *dominio de Hartogs* está dado por

$$H = \{z \in \mathbb{D}^2 : |z_1| < 1/2 \text{ ó } |z_2| > 1/2\}.$$

Usando la fórmula integral de Cauchy, se obtiene que toda función holomorfa en H se extiende holomórficamente a $\mathbb{D}^2$. En efecto:

Sea $f \in \mathcal{H}(H)$ y fija $r \in (1/2, 1)$. Para (z, w) en el bidisco $P = \mathbb{D} \times D(0, r)$, sea

$$F(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(z, \zeta) d\zeta}{\zeta - w}, \tag{2.1}$$

de modo que es fácil checar que F es holomorfa y que coincide con f en $D(0, 1/2) \times D(0, r)$. Haciendo $r \to 1$ obtenemos la extensión holomorfa deseada.

Ejercicio 2.4. Sea $n \geq 2$ y supongamos que U es una vecindad de la frontera de un polidisco $P \subset \mathbb{C}^n$, de forma que $U \cap P$ es conexo. Entonces toda función holomorfa en U se extiende holomórficamente a $P \cup U$.

Los dominios de existencia caen dentro de los dominios de holomorfía: $U \subset \mathbb{C}^n$ es llamado un **dominio de holomorfía** si no existen abiertos V y W en $\mathbb{C}^n$ tales que:

- V es conexo y no está contenido en U,
- $\emptyset \neq W \subset U \cap V$,
- Para toda $f \in \mathcal{H}(U)$ existe $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ (necesariamente única) tal que $\tilde{f} = f$ en W.

Dado un dominio de holomorfía U, se puede probar que es el dominio de existencia de una función holomorfa al verificar que la familia $\mathcal{F}$ de funciones $f \in \mathcal{H}(U)$ tales que U no es el dominio de existencia de f es de la primera categoría en $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$: Toma I un conjunto numerable denso en bU, y para cada par de abiertos V y W tales que V es un bola con centro en I y radio racional, mientras W es una componente conexa de $U \cap V$, prueba que para todo $m \in \mathbb{N}$, la familia $\mathcal{H}_m(U, V, W)$ de funciones $f \in \mathcal{H}(U)$ acotadas por m para las que existe $\tilde{f} \in \mathcal{H}(V)$ con $\tilde{f} = f$ en W, es densa en ninguna parte en $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$, y prueba que la unión numerable de éstas cubre a $\mathcal{F}$.

Ejercicio 2.5. Prueba que $\mathcal{H}_m(U, V, W)$ descrito arriba es denso en ninguna parte en $(\mathcal{H}(U), \tau_c)$, para τ_c la topología de convergencia uniforme en compactos.

Mientras el dominio de Hartogs en $\mathbb{C}^2$ claramente no es de holomorfía, todo dominio en $\mathbb{C}$ es de holomorfía: para cualquier a_0 en su frontera, la función $\frac{1}{z-a_0}$ tiene una singularidad en a_0.

Ejercicio 2.6. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ abierto. Supongamos que para toda sucesión $(a_j) \subset U$ que converge a un punto $a \in bU$, existe $f \in \mathcal{H}(U)$ que no tiene cota en (a_j). Entonces U es un dominio de holomorfía.

Otros ejemplos de dominios de holomorfía incluyen a la familia de dominios convexos, debido a que todo punto fuera del dominio convexo C se puede separar de C por medio de un hiperplano: dado $a_0 \in bC$, existe $v_0 \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$Re\langle a_0, v_0 \rangle > Re\langle u, v_0 \rangle, \text{ para todo } u \in C,$$

de modo que $f(z) = \frac{1}{\langle z-a, v_0 \rangle}$ es holomorfa en C y tiene una singularidad en a_0.

Dado que los dominios de holomorfía forman una familia relativamente grande, nos interesa caracterizarlos. Entre 1910 y 1911, Levi sentó las bases para hacer esto localmente en el caso de dominios cuya frontera es de clase C^2. Sus observaciones se basan en una caracterización de las funciones convexas de clase C^2 por medio del Hessiano.

Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tiene frontera C^2 si existe una función $\mathbb{R}$-valuada r de clase C^2 definida en una vecindad U de $b\Omega$ tal que $U \cap \Omega = \{z \in U : r(z) < 0\}$ y $du(z) \neq 0$ en todo punto $z \in b\Omega$. A r se le llama *función definitoria* de $b\Omega$.

Ejercicio 2.7. Prueba que si r_1 y r_2 son dos funciones definitorias de clase C^2 definidas en una vecindad U de $b\Omega$, entonces existe una función positiva $h \in C^1(U)$ tal que $r_1 = hr_2$ en U y $dr_1(x) = h(x)dr_2(x)$ para $x \in U \cap b\Omega$.

Ejercicio 2.8. Prueba que si un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ es convexo y tiene frontera C^2 dada por una función definitoria r, entonces para todo $z \in bU$,

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k}(z)\zeta_j\zeta_k \geq 0, \text{ para todo } \zeta \in T_z(b\Omega) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2n} : \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial r}{\partial x_j}(z)\zeta_j = 0\}. \tag{2.2}$$

Veamos como podemos interpretar la ecuación (2.2) en sentido complejo:

En forma compleja, el Hessiano real de r se escribe como

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_k}(z)\zeta_j\zeta_k = \operatorname{Re}(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(z)t_jt_k) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z)t_j\overline{t_k} \tag{2.3}$$

donde $t_j = \zeta_{2j-1} + i\zeta_{2j}$, $1 \leq j \leq n$.

Así, si r satisface (2.2), entonces,

$$\operatorname{Re}(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(z)t_jt_k) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z)t_j\overline{t_k} \geq 0 \text{ para todo } t \in T_z(b\Omega).$$

Si t se restringe al espacio tangente complejo $T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega) := T_z(b\Omega) \cap iT_z(b\Omega)$, entonces también $it \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega)$, así que debido a (2.3),

$$-\operatorname{Re}(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k}(z)t_jt_k) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z)t_j\overline{t_k} \geq 0 \text{ para todo } t \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega),$$

por lo que al promediar las dos ecuaciones anteriores obtenemos que

$$\mathcal{L}_z(r,t) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z)t_j\overline{t_k} \geq 0 \text{ para todo } t \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega),$$

donde $\mathcal{L}_z(r,t)$ es llamada la *forma de Levi* o el *Hessiano complejo*, y a la ecuación anterior se le conoce como la *condición de Levi*.

Ejercicio 2.9. Prueba que si r_1 es otra función definitoria para $b\Omega$, entonces existe una función positiva $h \in C^1(U)$ tal que $\mathcal{L}_z(r_1,t) = h(p)\mathcal{L}_z(r,t)$ para

$t \in T_z^{\mathbb{C}}(b\Omega)$. Para esto prueba y utiliza las siguientes propiedades de los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$: si $g : \Omega \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ y $F = (f_1, \cdots, f_m) : D \subset \mathbb{C}^n \to \Omega$,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial g/\partial z_j} &= \partial \bar{g}/\partial \overline{z_j}, \qquad \overline{\partial g/\partial \overline{z_j}} = \partial \bar{g}/\partial z_j; \\
\frac{\partial (g \circ F)}{\partial z_j} &= \sum_{k=1}^{m} [(\frac{\partial g}{\partial w_k} \circ F) \frac{\partial f_k}{\partial z_j} + (\frac{\partial g}{\partial \overline{w_k}} \circ F) \frac{\partial \overline{f_k}}{\partial z_j}, \\
\frac{\partial (g \circ F)}{\partial \overline{z_j}} &= \sum_{k=1}^{m} [(\frac{\partial g}{\partial w_k} \circ F) \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z_j}} + (\frac{\partial g}{\partial \overline{w_k}} \circ F) \frac{\partial \overline{f_k}}{\partial \overline{z_j}}.
\end{aligned}$$

Dado un dominio Ω con frontera C^2, decimos que Ω es *Levi pseudoconvexo en z* si se satisface la condición de Levi en z. Más aún, si la forma de Levi de r en z es estrictamente positiva cuando $t \neq 0$ está en el tangente complejo, decimos que Ω es *estrictamente Levi pseudoconvexo* en z.

Debido a los cálculos anteriores, hemos probado que los dominios convexos en $\mathbb{C}^n$ son Levi pseudoconvexos (en todo punto de su frontera). Lo mismo pasa para todo dominio en $\mathbb{C}$, debido a la vacuidad de la condición de Levi en tal caso. En general, Levi demostró que todo dominio de holomorfía con frontera C^2 es Levi pseudoconvexo. La prueba usa técnicas de subvariedades complejas y utiliza que la pseudoconvexidad de Levi es un invariante bajo mapeos biholomorfos locales [5, Cap. II].

A fin de garantizar que la condición de Levi se cumple fácilmente, ahora nos enfocaremos en funciones r cuyo Hessiano complejo $\mathcal{L}_z(r, \cdot)$ es semi-definido positivo en todo $\mathbb{C}^n$.

Por ejemplo, la función $r(z) = \|z\|^2 - 1 = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j} - 1$ satisface que $\frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} = \delta_{jk}$, así que $\mathcal{L}_z(r, t) = \|t\|^2 \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$. En este caso el Hessiano complejo es, más aún, positivo definido. En consecuencia, dado que r es función definitoria de la frontera de la bola Euclidiana en $\mathbb{C}^n$, obtenemos que $B(0,1)$ es estrictamente Levi pseudoconvexa.

Dada una función φ definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, con valores en $[-\infty, \infty)$, la función es llamada *plurisubarmónica* si

- φ es semicontinua superiormente: para todo $c \in \mathbb{R}$, $\{z \in \Omega : \varphi(z) \geq c\}$ es cerrado,
- si $z \in \Omega$ y $w \in \mathbb{C}^n$, $\varphi(z + \tau w)$ es subarmónica en $\tau \in \mathbb{C}$, i.e. satisface la propiedad del valor subpromedio: siempre que $z + \mathbb{D} \cdot w \subset \Omega$,

$$\varphi(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z + e^{i\theta} w) d\theta.$$

Veamos que las funciones plurisubarmónicas tienen Hessiano complejo semi-definido positivo: Sea φ una función plurisubarmónica en Ω; y dados z y w vectores fijos tales que $z + \mathbb{D}w \subset \Omega$, sea $f(\tau) = \varphi(z + \tau w)$, de modo que por subarmonicidad, para $r \in (0, 1)$,

$$\int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) - f(0)]d\theta \geq 0, \tag{2.4}$$

y hallando la expansión en serie de Taylor de f alrededor de 0, en coordenadas polares tenemos que para algún $c_{r\theta}$ en el segmento $[0, re^{i\theta}]$,

$$f(re^{i\theta}) - f(0) = r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(0) + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(0)$$
$$+ r^2/2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c_{r\theta}) + r^2/2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c_{r\theta}) + r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c_{r\theta})$$

que al sustituir en (2.4), eliminar integrales nulas, dividir por $r^2/2$ y usar el teorema de convergencia dominada, nos lleva a que $\pi(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)) \geq 0$, donde el Laplaciano de f en 0 coincide con $\mathcal{L}_z(\varphi, w) \geq 0$.

Ejercicio 2.10. Prueba el recíproco: que una función de clase C^2 con Hessiano complejo semi-definido positivo es plurisubarmónica. *Sugerencia*: Escribe el Laplaciano en coordenadas polares, y para radio fijo, considera la integral del Laplaciano de la función $\varphi(z + r \cdot e^{i\theta}w)$.

Ejercicio 2.11. Demuestra que si $f \in \mathcal{H}(U)$ para algún abierto U en $\mathbb{C}^n$, entonces $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$, $|f|$ y $\log|f|$ son funciones plurisubarmónicas en U. También prueba que toda composición $g \circ \varphi$ de una función convexa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y una función plurisubarmónica $\varphi : U \to [-\infty, \infty)$ es nuevamente una función plurisubarmónica (donde $g(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} g(t)$).

A su vez, para que el Hessiano complejo sea positivo definido, se tiene la siguiente caracterización [4]:

Dado $U \subset \mathbb{C}^n$, una función real $\varphi \in C^2(U)$ satisface que su Hessiano complejo $\mathcal{L}_z(r, \cdot)$ es positivo definido en todo $z \in U$ si y sólo si existe una función positiva $h \in C^\infty(U)$ tal que, para $z \in U$ y $w \in \mathbb{C}^n$ de norma pequeña (cuyo tamaño puede depender de z) se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi(z + e^{i\theta}w) - \varphi(z))d\theta \geq h(z)\|w\|^2. \tag{2.5}$$

En tal caso decimos que φ es una función *estrictamente plurisubarmónica*. Por ejemplo, hemos visto que φ dada por $\varphi(z) = \|z\|^2 - 1 = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j} - 1$ es estrictamente plurisubarmónica en $\mathbb{C}^n$, así que (2.5) se vale para alguna h.

El estudio de la plurisubarmonicidad estricta se justifica aún más debido a que todo dominio estrictamente Levi pseudoconvexo admite una función definitoria r_1 que es estrictamente plurisubarmónica en todo U. Esto se debe a que si r es cualquier función definitoria de $b\Omega$ y $M > 0$ es suficientemente grande, $r_1 = e^{M \cdot r} - 1$ satisface lo deseado.

Un dominio Ω es llamado *estrictamente pseudoconvexo* si admite una función r_1 estrictamente plurisubarmónica y C^2 en una vecindad U de $b\Omega$ con $U \cap \Omega = \{z \in U : r_1(z) < 0\}$. Dejamos al lector verificar los siguientes ejercicios sobre pseudoconvexidad estricta, para lo cual puede guiarse de [5, §2.8].

Ejercicio 2.12. Prueba que todo dominio estrictamente pseudoconvexo con frontera C^2 es estrictamente Levi pseudoconvexo.

Ejercicio 2.13. Prueba que todo dominio estrictamente pseudoconvexo es localmente un dominio de holomorfía.

Ejercicio 2.14. Si Ω tiene frontera C^2, prueba que Ω es estrictamente Levi pseudoconvexo en $p \in b\Omega$ si y sólo si existe un cambio holomorfo de coordenadas ω cerca de p cuya imagen es un convexo estricto, es decir, el Hessiano real de una función definitoria de la frontera es positivo definido en el espacio tangente por p a $b\Omega$.

3 Anexo 1: Pseudoconvexidad (estricta)

Una de las razones para estudiar a los dominios estrictamente pseudoconvexos de entre los dominios pseudoconvexos con frontera C^2 es que todo dominio pseudoconvexo se puede extenuar por dentro con dominios estrictamente pseudoconvexos. Vemos a qué se debe esto.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ es una *función exhaustiva* de Ω si para todo $c \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Omega_c = \{z \in \Omega : \varphi(z) < c\}$ es compacto relativo en Ω.

Es claro que una función exhaustiva φ de Ω satisface que

$$\varphi(z) \to \infty \text{ conforme } z \to b\Omega. \tag{3.1}$$

Si Ω es acotado, recíprocamente se tiene que (3.1) basta para que φ sea función exhaustiva de Ω, pues cada Ω_c permanece a distancia positiva de $b\Omega$.

Por ejemplo, si d_Ω denota la función distancia a la frontera de Ω, es claro que $-\log d_\Omega$ es una función exhaustiva. Más aún, si Ω es Levi pseudoconvexo y acotado, $-\log d_\Omega$ resulta una función plurisubarmónica cerca de la frontera:

Para probarlo, considera la función

$$r(z) = \begin{cases} -d_\Omega(z), & \text{si } z \in \Omega; \\ d_\Omega(z), & \text{si } z \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Usando el teorema de la función implícita o procediendo como en el ejercicio 2.7, se obtiene que r es una función definitoria de Ω de clase C^2 en una vecindad de $b\Omega$. Por tanto r satisface la condición de Levi.

Supongamos que $-\log d_\Omega$ no es plurisubarmónica cerca de la frontera, por lo que existen z cerca de la frontera (donde r es C^2) y $w \in \mathbb{C}^n$ tales que

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar{\tau}} \log d_\Omega(z+\tau w)|_{\tau=0} > 0. \tag{3.3}$$

Expandiendo $\log d_\Omega(z+\tau w)$ en serie de Taylor en forma compleja alrededor de 0, tenemos que para algunas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\gamma > 0$,

$$\log d_\Omega(z+\tau w) = \log d_\Omega(z) + \mathrm{Re}(\alpha\tau + \beta\tau^2) + \gamma|\tau|^2 + O(|\tau|^3), \tag{3.4}$$

para τ de norma pequeña. Tomemos $\eta \in \mathbb{C}^n$ tal que $z+\eta \in b\Omega$ y consideremos el disco analítico $\mathbb{D}_\delta = \{z(\tau) = z + \tau w + \eta e^{\alpha\tau+\beta\tau^2} : |\tau| \le \delta\}$ para δ pequeño, de modo que si $|\tau| \le \delta$ y $\tau \neq 0$,

$$\begin{aligned} d_\Omega(z(\tau)) &\ge d_\Omega(z+\tau w) - \|\eta\| \cdot |e^{\alpha\tau+\beta\tau^2}| \\ &\ge \|\eta\|(e^{\frac{\gamma}{2}|\tau|^2} - 1)|e^{\alpha\tau+\beta\tau^2}| \\ &> 0. \end{aligned}$$

Como además $z(0) = z + \eta \in b\Omega$, tenemos que el disco analítico $\mathbb{D}_\delta$ es tangente a $b\Omega$ en $z(0)$, así que

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\bar{\tau}} d_\Omega(z(\tau))|_{\tau=0} > 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial}{\partial\tau} d_\Omega(z(\tau))|_{\tau=0} = 0, \tag{3.5}$$

pero de la definición de r esto significa que

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z+\eta) z_j'(0)\overline{z_k'(0)} < 0 \ \text{ y } \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_k}(z+\eta) z_k'(0) = 0, \tag{3.6}$$

lo que contradice que r satisface la condición de Levi en $z+\eta \in b\Omega$. Por tanto $-\log d_\Omega$ es plurisubarmónica cerca de la frontera.

Usando lo anterior, es fácil verificar que todo dominio acotado y Levi pseudoconvexo Ω admite una función exhaustiva y estrictamente plurisubarmónica de clase C^2 en todo Ω. Basta extender $-\log d_\Omega$ a una función η de clase C^2 en todo Ω, que seguirá siendo plurisubarmónica en una vecindad de $b\Omega$, y considerar para $M > 0$

$$\lambda(z) = \eta(z) + M\|z\|^2, \tag{3.7}$$

la cual aún será una función exhaustiva, y adicionalmente será estrictamente plurisubarmónica en todo Ω cuando M sea suficientemente grande.

Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es llamado *pseudoconvexo* si existe una función exhaustiva y estrictamente plurisubarmónica de clase C^2 sobre Ω. Hemos visto que los dominios Levi pseudoconvexos y acotados son pseudoconvexos.

Ejercicio 3.1. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ es pseudoconvexo entonces $-\log d_\Omega$ es plurisubarmónica y continua en todo Ω.

Probemos ahora que los dominios acotados con frontera C^2 que son pseudoconvexos resultan Levi pseudoconvexos:

Si Ω con frontera C^2 es acotado y pseudoconvexo, debido al ejercicio 3.1 tenemos que $-\log d_\Omega$ es una función plurisubarmónica en Ω, y de clase C^2 cerca de $b\Omega$ pues así es la función definitoria r dada por la ecuación (3.2). Entonces, si $z \in \Omega$ está suficientemente cerca de $b\Omega$ y $a \in \mathbb{C}^n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} (-\frac{1}{d_\Omega}) \frac{\partial^2 d_\Omega}{\partial z_j \partial z_k} a_j \bar{a}_k + \frac{1}{d_\Omega^2} |\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial d_\Omega}{\partial z_j} a_j|^2 \geq 0, \tag{3.8}$$

y en consecuencia

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) a_j \bar{a}_k \geq 0 \text{ cuando } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) a_j = 0, \tag{3.9}$$

lo cual se preserva al tomar el límite conforme $z \to b\Omega$, por lo que Ω es Levi pseudoconvexo.

Puesto que para dominios acotados con frontera C^2 se tiene que pseudoconvexidad y pseudoconvexidad de Levi son conceptos equivalentes, resulta evidente que cada dominio pseudoconvexo Ω se puede extenuar con dominios estrictamente pseudoconvexos, pues si φ es una función exhaustiva y estrictamente plurisubarmónica de clase C^2 sobre Ω, entonces para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Omega_\nu = \{z \in \Omega : \varphi(z) < \nu\}$ es pseudoconvexo estricto y compacto relativo en Ω, y de tal suerte que $\cup_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu = \Omega$.

Ejercicio 3.2. Prueba que si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ es un dominio pseudoconvexo con frontera suave dada por la función definitoria r entonces existen constantes $K > 0$ y $\eta_0 \in (0,1)$ tales que para todo $\eta \in (0, \eta_0]$, la función $\rho = -(-re^{-K\|z\|^2})^\eta$ es una función exhaustiva y estrictamente plurisubarmónica de clase C^∞ sobre Ω.

4 Anexo 2: Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Al final de la sección 2 mencionamos que los dominios estrictamente pseudoconvexos localmente se ven cómo dominios de holomorfía. El problema de Levi, que estuvo abierto por alrededor de 30 años, consistía en responder si los dominios pseudoconvexos eran de hecho dominios de holomorfía (globalmente). Observemos que alrededor de cada punto fronterizo p de un dominio estrictamente pseudoconvexo Ω podemos hallar una función localmente holomorfa con una singularidad en el punto dado p, a saber, dada una función definitoria r de $b\Omega$, r estrictamente plurisubarmónica, el *polinomio de Levi* $P(z) = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_i}(p)(z_i - p_i) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial z_j}(p)(z_i - p_i)(z_j - p_j)$ resulta tener parte real estrictamente positiva en $\Omega \cap U$ para U una vecindad de p (debido a la expansión en serie de Taylor de r), de modo que $f = 1/P$ es una función holomorfa en $\Omega \cap U$ con singularidad en p. Pasar de esta construcción local a una global es mucho más difícil que para problemas de variable real en el que se pueden usar herramientas de pegado suave como las particiones de la unidad, ya que en el caso complejo la función resultante de este proceso generalmente no será holomorfa debido al principio de identidad.

Alternativamente, bastaría resolver una versión multivariable del problema de Mittag-Leffler, pues las funciones meromorfas $f \in \mathcal{M}(U)$ como antes y $0 \in \mathcal{M}(\Omega)$ satisfacen que $f - 0$ es holomorfa en el dominio común $U \cap \Omega$, así que bastaría hallar una función meromorfa m en $\Omega \cup U$ tal que $m - f$ sea holomorfa en U y $m - 0$ sea holomorfa en Ω, pues en consecuencia m sería una función holomorfa en Ω con una singularidad en p. Una reformulación de la pregunta anterior consiste en hallar funciones holomorfas $g \in \mathcal{H}(U)$ y $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que $f - g = 0 - h$ en $\Omega \cap U$, i. e. $h - g = f - 0$ en $\Omega \cap U$. Esta versión multivariable del problema de Mittag-Leffler se puede reducir a un caso del *problema aditivo* siguiente: Si D es un dominio abierto con cubierta abierta $\{U_1, U_2, \cdots\}$, y si las funciones holomorfas $g_{j,k} \in \mathcal{H}(U_j \cap U_k)$ son tales que $g_{i,j} + g_{j,k} + g_{k,i} = 0$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$, hay que hallar funciones $g_j \in \mathcal{H}(U_j)$ tales que $g_j - g_i = g_{i,j}$ en $U_i \cap U_j$. Cuando todo problema aditivo en D es soluble, el dominio D resulta ser un dominio de holomorfía. Más aún, el problema aditivo admite solución siempre que podamos resolver unas respectivas ecuaciones de Cauchy-Riemann, que describimos a continuación.

Dada una función $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ de clase C^1, la forma diferencial $\bar{\partial} f$ está dada por $\bar{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\overline{z_j}$, donde $d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$, con $x_j = \mathrm{Re}(z_j)$, $y_j = \mathrm{Im}(z_j)$. Debido a un teorema de Hartogs, una función f cómo antes es holomorfa si y sólo si cada una de sus componentes lo es, así que f es holomorfa si y sólo si $\bar{\partial} f = 0$. Puesto que para $n = 1$ tenemos que $\bar{\partial} f = 0$ encapsula a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se preserva este nombre al pasar a varias variables.

Recíprocamente, dada una forma de clase C^1, $w = \sum_{j=1}^{n} g_j d\overline{z_j}$ con $g_j \in C^1(D)$, queremos saber cuando es posible hallar una función $f \in C^1(D)$ tal que $\bar{\partial} f = w$ (*ecuaciones inhomogéneas de Cauchy-Riemann*). En general, dada una *forma de tipo* (p, q) sobre D, $f = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$, donde $I = (i_1, \cdots, i_p)$ y $J = (j_1, \cdots, j_q)$ son multiíndices de longitudes p y q respectivamente, y $dz^I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$, $d\bar{z}^J := d\overline{z_{j_1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{z_{j_q}}$, denotamos por $\bar{\partial} f$ a la forma de tipo (p,q+1) dada por $\sum_{I,J} \bar{\partial} f_{I,J} \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J$. Es claro que, de existir una función f tal que $\bar{\partial} f = w$, entonces $0 = \bar{\partial}^2 f = \bar{\partial} w$, así que la forma w ha de verificar las *condiciones de compatibilidad* $\frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_j}$, para $j, k = 1, \cdots, n$.

Para ilustrar la técnica $\bar{\partial}$, veamos una prueba del problema aditivo en D con cubierta abierta $\{U_1, U_2\}$, suponiendo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann tienen solución en D. Dada $f \in \mathcal{H}(U_1 \cap U_2)$, es posible usar técnicas de análisis real para hallar funciones $v_j \in C^\infty(U_j)$, $j = 1, 2$, tales que $v_2 - v_1 = f$ en $U_1 \cap U_2$. Entonces en $U_1 \cap U_2$ tenemos que $\bar{\partial} v_2 - \bar{\partial} v_1 = 0$, así que obtenemos una forma global w en D dada por $w = \bar{\partial} v_j$ en U_j, $j = 1, 2$, que satisface las condiciones de compatibilidad $\bar{\partial} w = 0$. Entonces podemos hallar $u \in C^1(D)$ tal que $\bar{\partial} u = w$, de modo que $g_j = v_j - u$ satisface que $\bar{\partial} g_j = \bar{\partial} v_j - \bar{\partial} u = w - w = 0$, i. e. $g_j \in \mathcal{H}(U_j)$, $j = 1, 2$, y tal que en $U_1 \cap U_2$ cumplen que $g_2 - g_1 = (v_2 - u) - (v_1 - u) = v_2 - v_1 = f$, cómo buscábamos.

Ahora veremos soluciones particulares a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, comenzando con formas sobre dominios del plano complejo $\mathbb{C}$. Una aparición natural de la forma $\bar{\partial}$ asociada a una función de clase C^1 es en la fórmula integral de Cauchy generalizada, que el lector puede verificar con el teorema de Stokes:

Si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio acotado con frontera bD de clase C^1, y $u \in C^1(\overline{D})$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{bD} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \iint_D \frac{\frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}\right), \text{ para todo } z \in D. \tag{4.1}$$

Puesto que la primera integral en el lado derecho de la ecuación 4.1 claramente representa una función holomorfa en z, tenemos que si $f = \bar{\partial} u$ entonces

$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta})$, con lo cual obtenemos una idea para una solución con el *kernel de Cauchy* a las ecuaciones inhomogéneas de Cauchy-Riemann en una variable compleja (ver la prueba en [2]):

Si $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio acotado con frontera bD de clase C^1 y $f \in C^k(\bar{D})$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, entonces la función

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \text{ para todo } z \in D, \tag{4.2}$$

está bien definida y es de clase C^k en D y satisface que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f(z)$ en D. Cuando $k = 0$, u definida por (4.2) es continua en D y satisface que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f(z)$ en el sentido de distribución.

Para el caso de formas sobre dominios en $\mathbb{C}^n$, las siguientes soluciones particulares son conocidas [2]:

Si $f = \sum_{j=1}^n f_j d\overline{z_j}$ es una forma C^k de tipo $(0,1)$ con soporte compacto, i. e. $f_j \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$, $j = 1, \cdots, n$, que satisface las condiciones de compatibilidad $\bar{\partial} f = 0$, entonces existe una función C^k de soporte compacto, $u \in C_0^k(\mathbb{C}^n)$, tal que $\bar{\partial} u = f$. Cuando $k = 0$, si se satisfacen las condiciones de compatibilidad $\bar{\partial} f = 0$ en el sentido de distribución, entonces existe $u \in C_0(\mathbb{C}^n)$ tal que $\bar{\partial} u = f$ se vale en el sentido de distribución.

Dados dos polidiscos abiertos centrados en cero, $D(0,r)$ y $D(0,r')$, tales que $\overline{D(0,r')} \subset D(0,r)$, y dada una forma suave f sobre $D(0,r)$ de tipo $(p, q+1)$ con $p, q \geq 0$ que satisface las condiciones de compatibilidad $\bar{\partial} f = 0$, existe una forma suave u de tipo (p,q) sobre $D'(0,r)$ tal que $\bar{\partial} u = f$.

La soluciones que acabamos de mencionar se pueden construir, respectivamente, con la fórmula integral de Cauchy y con aplicaciones repetidas de la solución 1-dimensional a las ecuaciones CR via el kernel de Cauchy en (4.2). El kernel de Cauchy tiene una generalización a varias variables llamado el kernel de Bochner-Martinelli, con una asociada fórmula integral generalizada:

El *kernel de Bochner-Martinelli* es la forma de tipo $(n, n-1)$ dada por

$$B(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}) d\zeta_j \wedge (\wedge_{k \neq j} d\overline{\zeta_k} \wedge d\zeta_k) \text{ para } \zeta \neq z.$$

El lector puede verificar que $\bar{\partial}_\zeta B(\zeta, z) = 0$ cuando $\zeta \neq z$, pero el kernel de Bochner-Martinelli no es holomorfo en z.

Dado $D \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ un dominio acotado con frontera bD de clase C^1, tenemos que

i) Si $f \in C^1(\bar{D})$, entonces

$$f(z) = \int_{bD} f(\zeta)B(\zeta, z) - \iint_D \bar{\partial} f \wedge B(\zeta, z), \text{ cuando } z \in D, \text{ y}$$
$$0 = \int_{bD} f(\zeta)B(\zeta, z) - \iint_D \bar{\partial} f \wedge B(\zeta, z), \text{ cuando } z \notin D.$$

ii) Si $f \in \mathcal{H}(D) \cap C(\bar{D})$, entonces

$$f(z) = \int_{bD} f(\zeta)B(\zeta, z), \text{ cuando } z \in D.$$

Ejercicio 4.1. Usa la fórmula integral de Cauchy para probar lo siguiente: Si f es una función continua y $\mathbb{C}$-valuada en el dominio $D \subset \mathbb{C}^n$, y S es una hipersuperficie real suave en $\mathbb{C}^n$ tal que f es holomorfa en $D \setminus S$, entonces f es holomorfa en D.

Ejercicio 4.2. Usa una solución de soporte compacto a unas ecuaciones de Cauchy-Riemann para probar la siguiente generalización del ejercicio 2.4: Si D es un dominio acotado en $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$, y K es un subconjunto compacto de D tal que $D \setminus K$ es conexo, entonces toda función holomorfa en $D \setminus K$ se puede extender holomórficamente a D.

En cuánto a una solución general a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ésta se puede encontar en dominios pseudoconvexos usando métodos de operadores no-acotados densamente definidos [3]. Para concluir presentamos dos formas muy útiles de la solución:

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo y sea f una forma $(p, q+1)$ sobre Ω, con coeficientes en $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, tal que es $\bar{\partial}$-cerrada: $\bar{\partial} f = 0$ en el sentido de distribución. Entonces f es $\bar{\partial}$-exacta, es decir, existe una forma u de tipo (p, q) con coeficientes en $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $\bar{\partial} u = f$ en el sentido de distribución.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio pseudoconvexo y f es una forma $(p, q+1)$ sobre Ω con coeficientes en $C^\infty(\Omega)$ tal que $\bar{\partial} f = 0$, entonces existe una forma u de tipo (p, q) con coeficientes en $C^\infty(\Omega)$ tal que $\bar{\partial} u = f$.

References

[1] H. Boas, *Lecture notes on several complex variables*, http://www.math.tamu.edu/ boas/courses/650-2013c/notes.pdf

[2] S. C. Chen, M. C. Shaw, *Partial Differential Equations in Several Complex Variables*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Providence, Rhode Island, 2001.

[3] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 3rd edition, North Holland, Amsterdam, 1990.

[4] S. Ortega Castillo, *Strong pseudoconvexity in Banach spaces*, arXiv preprints.

[5] M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer Verlag, Berlin, (1986).